



Gravimetría

Campos Potenciales

Portada: Oleo del pintor veneciano Bernardo Strozzi, de alrededor de 1635
“Eratóstenes enseñando en Alejandría” Museo de Bellas Artes de Montreal, Canadá,
N°1959.1225

Geodesia

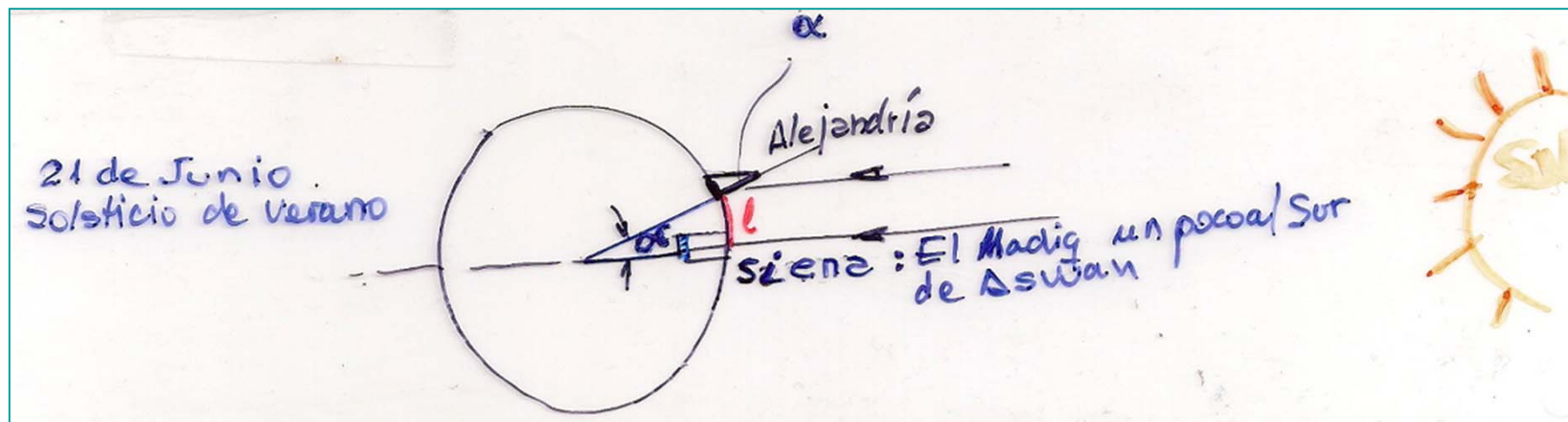
Eratóstenes de Cyrene (276 AC-194 AC)

Cyrene: Capital del distrito de Cyrenaica (Libia)

Bibliotecario de Alejandría: alrededor de 255 AC. fue el tercer director de la biblioteca.



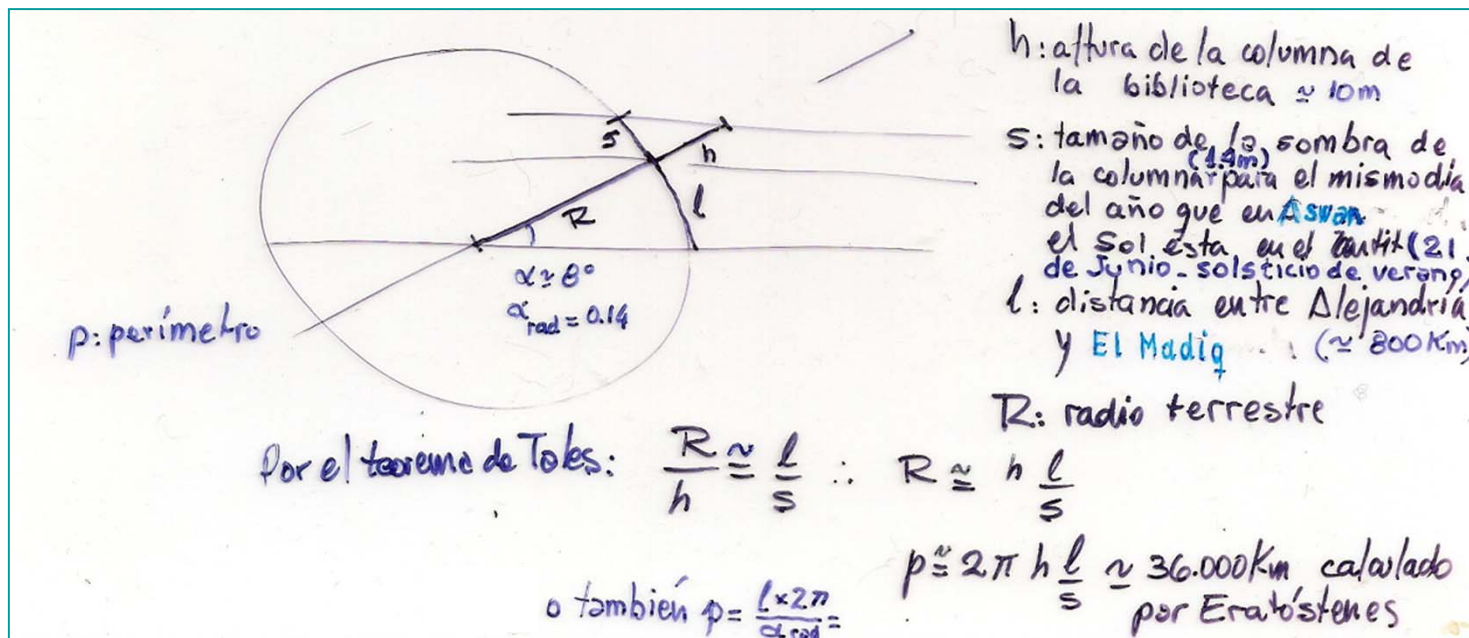
Pozo de agua en Syene (Siena) un poco al sur de Aswan

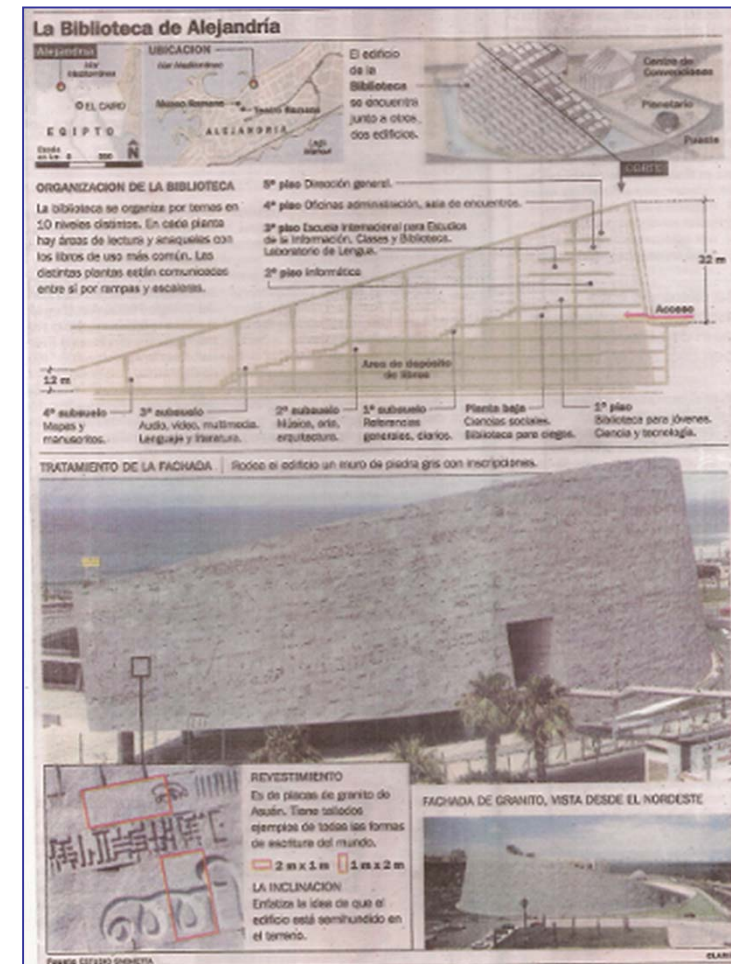
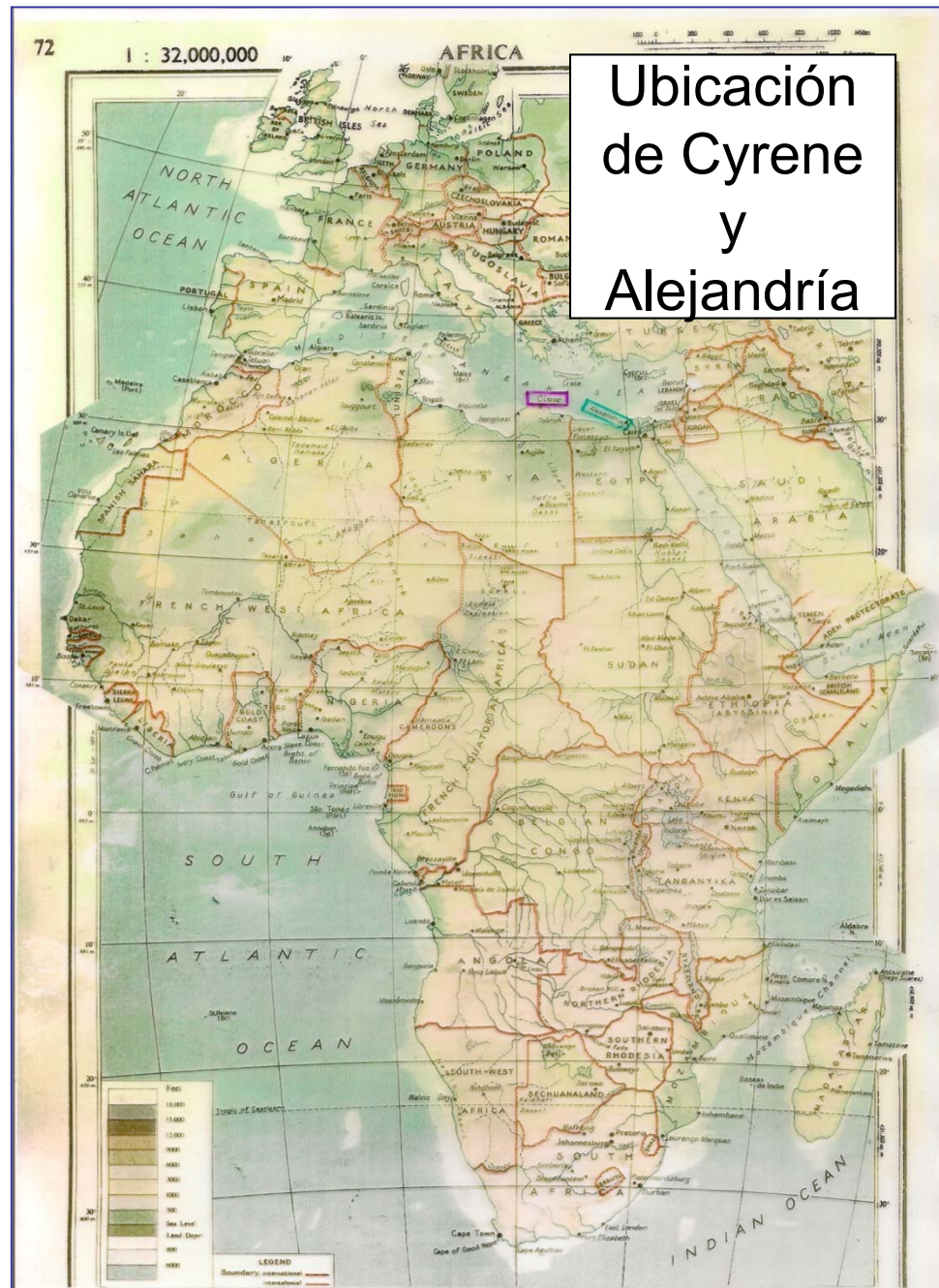




Geodesia

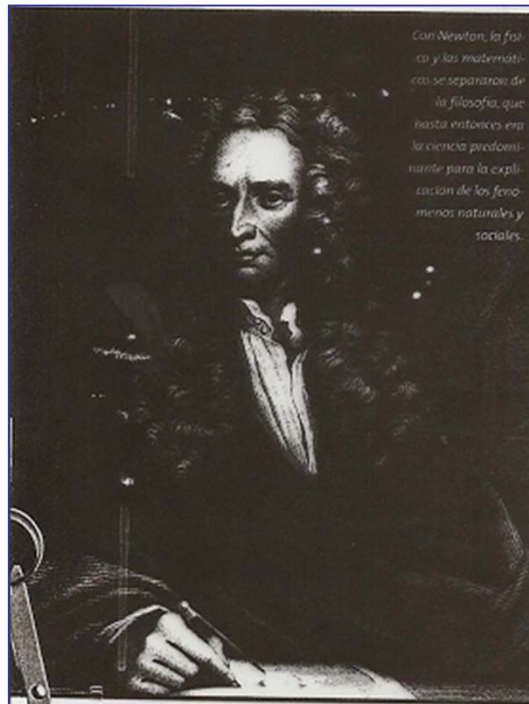
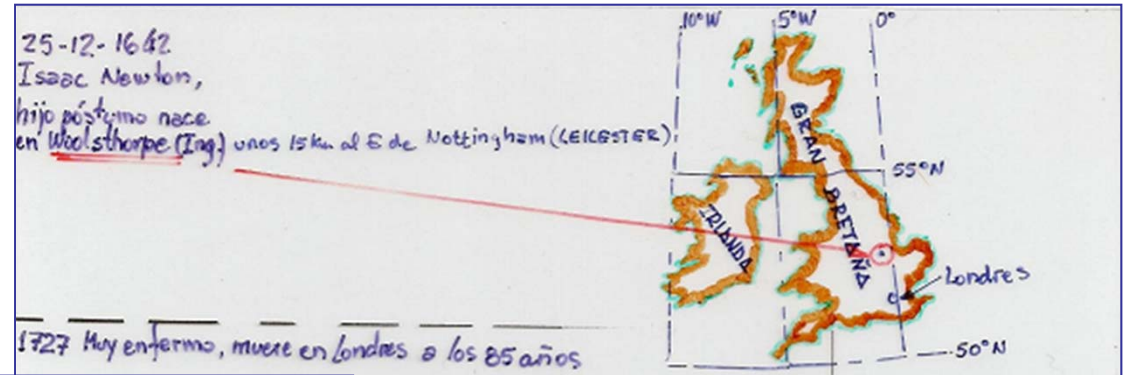
- Calculó $p \approx 41.000$ km
- Actualmente:
 $6.370 \text{ km} \times 2\pi \approx 40.024$ km
- Si α es pequeño ($<5^\circ$) puede usarse el Teorema de Tales para calcular el R:





Biblioteca de Alejandría

Gravedad



Con Newton, la física y las matemáticas se separaron de la filosofía, que hasta entonces era la ciencia predominante para la explicación de los fenómenos naturales y sociales.

> FUE UN ESTUDIOSO APASIONADO DE LA ALQUIMIA DURANTE TODA SU VIDA

El espíritu inquieto de Newton lo llevó a interesarse por otras disciplinas que se alejaban de la ciencia estricta y que tenían que ver más con las pseudociencias de la época medieval. Se trata de la alquimia, de la cual Newton se reconoció como un aficionado y practicante irredento durante más de 30 años. No es casual que el 10 por ciento de su biblioteca estuviera compuesto por viejos volúmenes sobre alquimia que, supuestamente, albergaban el secreto para obtener la mítica piedra filosofal, el medio definitivo para convertir la materia inanimada en oro.

Como era de esperar, los experimentos que Newton desarrolló en este campo terminaron en un rotundo fracaso. No obstante, su fe en este empeño permaneció inquebrantable a lo largo de su dilatada vida de investigador racionalista.

> EN SU PRINCIPIA SENTO LAS BASES DE LA MECANICA RACIONALISTA

En agosto de 1684, el astrónomo inglés Edmond Halley -descubridor, en 1680, del cometa que lleva su nombre- visitó a Newton en el Trinity College de Cambridge y le formuló la siguiente pregunta: "¿Cuál sería la curva descrita por los planetas, suponiendo que la fuerza de atracción hacia el Sol fuera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del mismo?". El físico respondió sin vacilación: "Una elipse".

Tres meses después, Newton envió a Halley un opúsculo titulado *De Motu* en el que resolvía matemáticamente el problema de las órbitas elípticas. Aquel manuscrito sobre el movimiento de los cuerpos creció con el paso del tiempo y se hizo monumental al convertirse en *Principia*, cuyo editor y patrocinador fue Halley. La obra fue escrita en unos 18 meses, en el latín científico

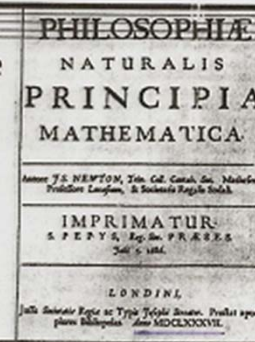
UN METODO CIENTIFICO REVOLUCIONARIO

1 Newton enunció teorías que cuestionaban la idea medieval de un universo estático. Sus leyes sobre la gravedad postulaban la existencia de un universo en constante movimiento.

2 Y es que Newton fue el primero en establecer una teoría unificada: del universo, apoyada en la matemática, y no sólo en la mera observación y descripción de los fenómenos.

: Una obra cumbre

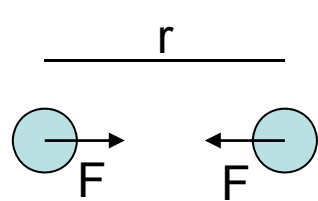
En 1687 Newton publicó su obra maestra: *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* que, años después, se conocería por su forma abreviada *Principia*. En esta obra, el físico estableció sus famosas leyes sobre el movimiento y la gravedad. Esta serie de postulados cambió el concepto inmutable y estático que se tenía del universo, regido solamente por las leyes divinas.



año 1687

Isaac Newton
(1642 – 1727)

Ley de Newton (Principia Mathematica, 1687)



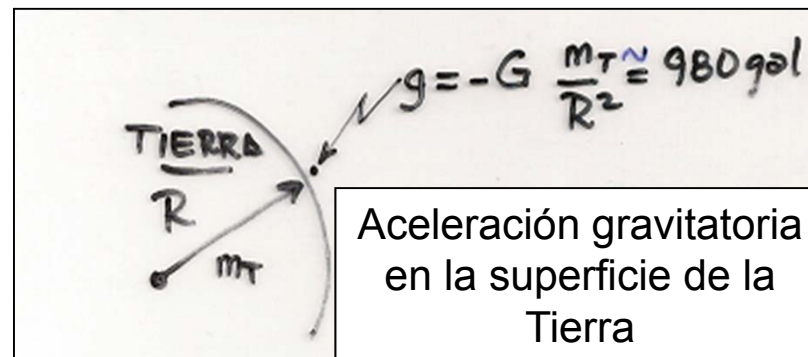
$$F = - G m_1 m_2 / r^2$$

$$F \text{ [dinas]} ; m_{1,2} \text{ [g]} ; r \text{ [cm]} \rightarrow G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$$

G = Constante Gravitacional
(Cavendish, 1798)

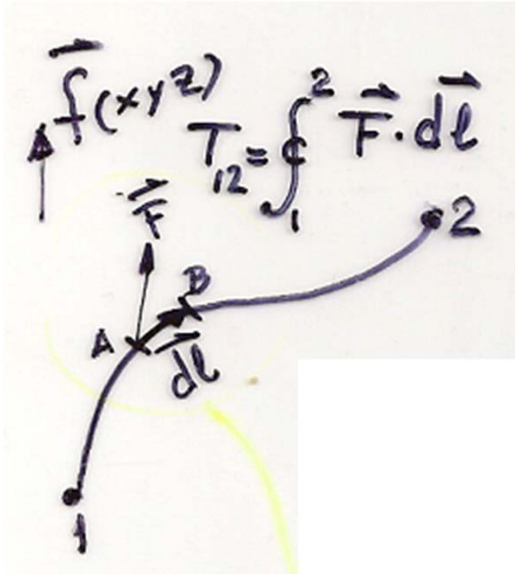
Fuerza de atracción por unidad de masa (aceleración de la gravedad a una distancia r):

$$g = F / m_2 = - G m_1 / r^2 \quad [\text{cm s}^{-2}] \quad 1 \text{ cm s}^{-2} = 1 \text{ gal}$$



- Unidades utilizadas en prospección gravimétrica:
 - mgal; unidad gravimétrica
 - $1 \text{ gal} = 10^3 \text{ mgal} = 10^4 \text{ u.g.}$
 - $g \sim 10^7 \text{ u.g.}$
- Microgravimetría resolución $< \text{u.g.} \times 10^{-1}$
- Sistema MKS:
 - $1 \text{ m s}^{-2} = 10^2 \text{ gal} = 10^6 \text{ u.g.}$
 - $1 \mu\text{m s}^{-2} = 1 \text{ u.g}$

Nociones de Potencial y Campo Vectorial Conservativo



$W(\vec{r})$ función escalar, derivable, de derivada direccional continua. En la dirección de máxima variación da una función vectorial \vec{f} continua $\therefore \vec{f}$ por lo tanto define una función potencial W y también $\vec{f}(\vec{r})$ define un sistema conservativo.

$$W(\vec{r})$$

En coordenadas cartesianas: $W(x, y, z)$

En coordenadas polares : $W(\lambda, \theta, r)$

λ : longitud

Θ : colatitud

r : distancia al centro de coordenadas

Nociones de Potencial y Campo Vectorial Conservativo (cont.)

si T continua y derivable y con derivada continua entonces \vec{F} se puede descomponer en \vec{AC} y \vec{CB} y teniendo en cuenta que \vec{F} es continua en el entorno.

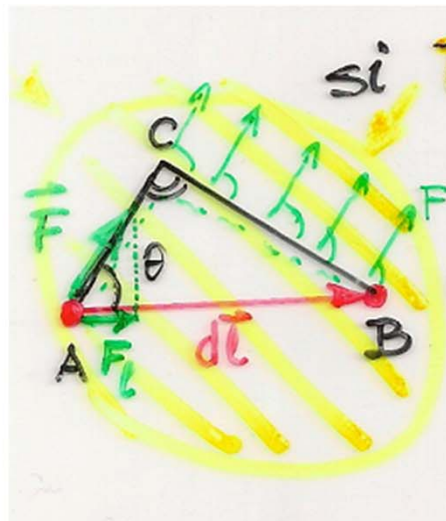
no $\Rightarrow dT_{ACB} = dT_{AC} + dT_{CB} =$

$= \vec{F} \cdot \vec{AC} \cdot \cos 0^\circ + \vec{F} \cdot \vec{CB} \cdot \cos 90^\circ$

$\vec{AC} = d\vec{l} \cdot \cos \theta$

$\Rightarrow = |\vec{F}| \cdot |d\vec{l}| \cos \theta$

$dT_{ACB} = dT_{AB}$



diferencial Trabajo

$$dT_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta = F_c dl$$



(+) Trabajo que entrega el sistema

(-) Trabajo que recibe el sistema

$$dT_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \overbrace{|\vec{F}| \cdot |d\vec{l}| \cos \theta}^{F_c \cdot dl}$$

Nociones de Potencial y Campo Vectorial Conservativo (Cont.)

- El trabajo realizado por la fuerza F para pasar de $1 \rightarrow 2$ es independiente del camino realizado, depende solamente del punto de partida y del punto final del recorrido.

- Energía Potencial : W

$$T = -W$$

W es el trabajo (T) cambiado de signo y es la energía potencial (W) que pierde el campo (sistema) al realizar (entregar) un trabajo T .

Aplicación al campo vectorial gravitatorio de una masa puntual:

1^{ra} aproximación : Esfera

Newton (1687)

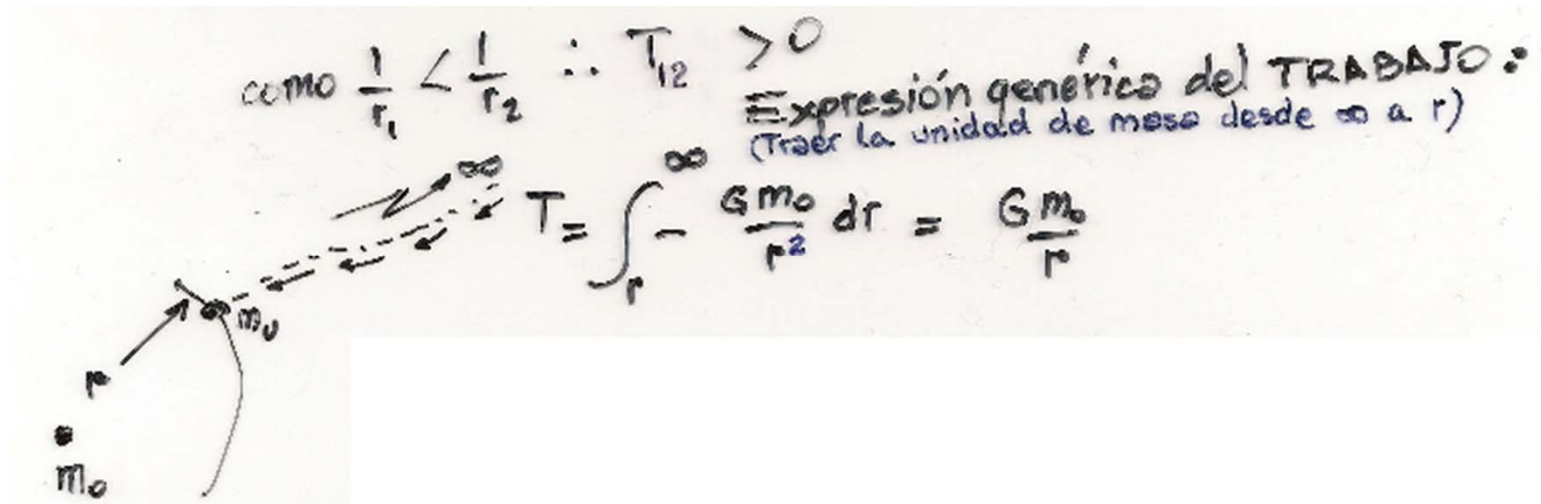
$$F = - G m_0 m_u / r^2$$

Diagram illustrating the gravitational field of a point mass m_0 at the origin. A path is shown from r_1 to r_2 . A small mass element dm is shown at distance r from the origin, with a force vector \vec{F} pointing towards the origin. The path is defined by a vector $d\vec{r}$. The diagram also shows equipotential surfaces W_1 and W_2 .

Handwritten notes and equations:

- $m_0 = 1$
- \vec{r}
- $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$
- $\vec{F} = -G \frac{m_0}{r^2} \vec{e}_r$
- $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m_0}{r^2} dr \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$
- como $T_{2'2} = 0$ pues $\vec{F} \perp d\vec{r}$
- $T_{12} = T_{12'} + T_{2'2}$
- $T_{12} = T_{12'} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -G m_0 \frac{dr}{r^2} = -G m_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$
- $= +G m_0 \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = G m_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$
- $T_{12} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$

Aplicación al campo vectorial gravitatorio de una masa puntual:
1ª aproximación : Esfera (cont.)



T es una función escalar, diferenciable, de derivada direccional continua. Definimos como potencial a $-T$ y lo llamamos W y es la energía potencial que pierde el (sistema) campo al realizar un trabajo T

$$T = -W$$

Si elegimos el potencial en el infinito igual a cero:

$$W = -G m_0 1 / r$$

Por lo expresado, W es una función escalar derivable y con derivada continua y se cumple que la derivada en la dirección de máxima variación (\vec{e}_m) cambiada de signo (-derivada direccional) define en cada punto un campo de fuerzas (vectorial conservativo)

$$\vec{F} = - \frac{\partial W}{\partial m} \cdot \vec{e}_m$$

$\frac{\partial}{\partial m} \vec{e}_m$ se define el operador $\vec{\nabla}$ (llamado gradiente) en coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

se expresa el campo de fuerzas gravitatorio como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En cartesianas es:} \\ F_x = -\partial W / \partial x \\ F_y = -\partial W / \partial y \\ F_z = -\partial W / \partial z \end{array} \right.$$

$F_s = \frac{\partial W}{\partial s}$

$d\vec{s}$ derivada direccional en la dirección de la tangente a la superficie $W = cte$

sobre una superficie equipotencial ($W = cte$) entonces se cumple que $\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial cte}{\partial s} = 0$

entonces F debe ser \perp en toda la sup. $W = cte$

Veamos como se obtiene el campo de fuerzas gravitatorios a partir de la función potencial que le corresponde a una determinada distribución de densidad en el espacio ($\delta(r_i)$)



$$dW = -G \frac{dm}{|\vec{r}_2|}$$

$$W(\vec{r}) = -G \int_V \frac{\delta(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dv$$

$$dm = \delta(\vec{r}_1) dv$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1$$

definida la función $W(\vec{r})$ se calcula el campo

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W(\vec{r})$$

Coordenadas Polares

θ = colatitud

λ = longitud

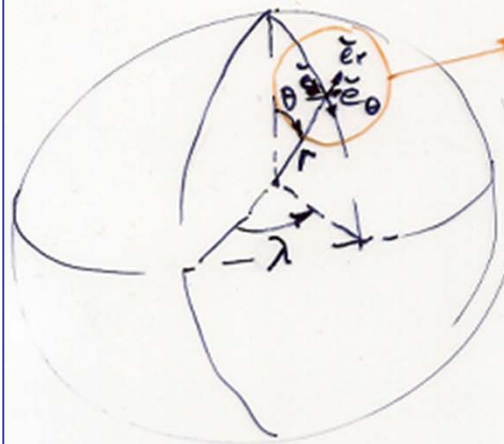
r = radio

versores

\vec{e}_θ

\vec{e}_λ

\vec{e}_r



Función potencial en POLARES

$$W(\theta, \lambda, r)$$

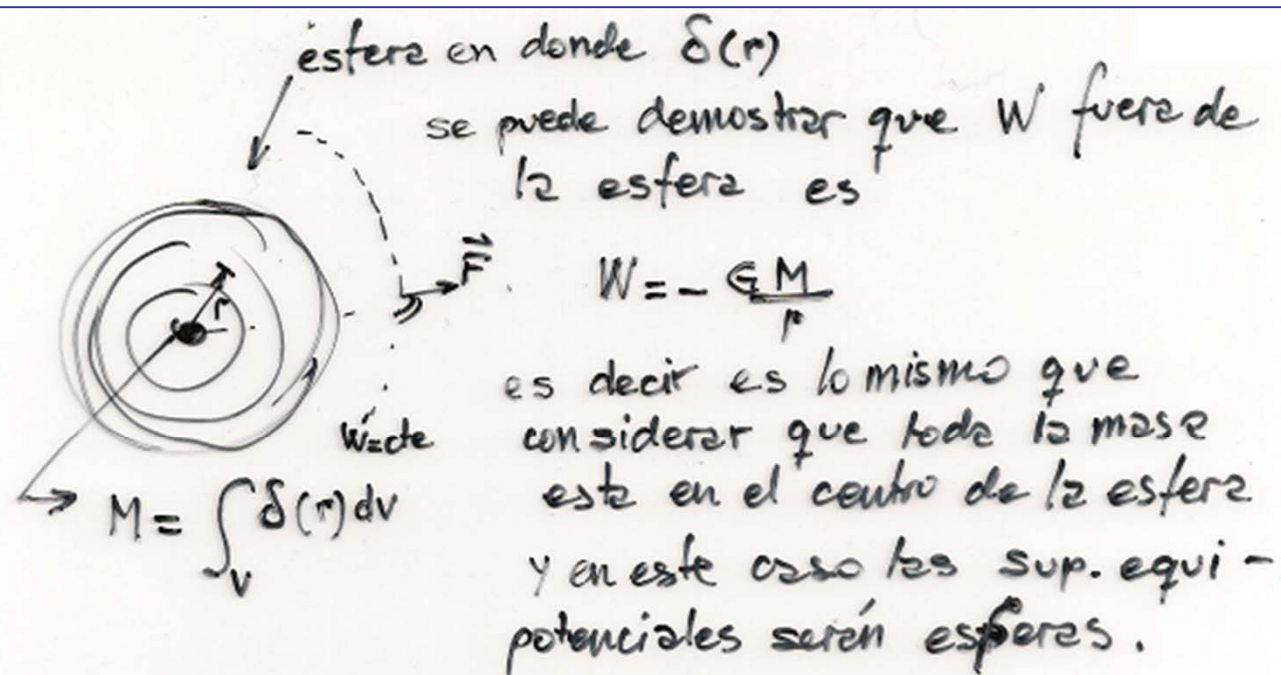
$$\vec{F}_r = - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}_\lambda = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \cdot \vec{e}_\lambda$$

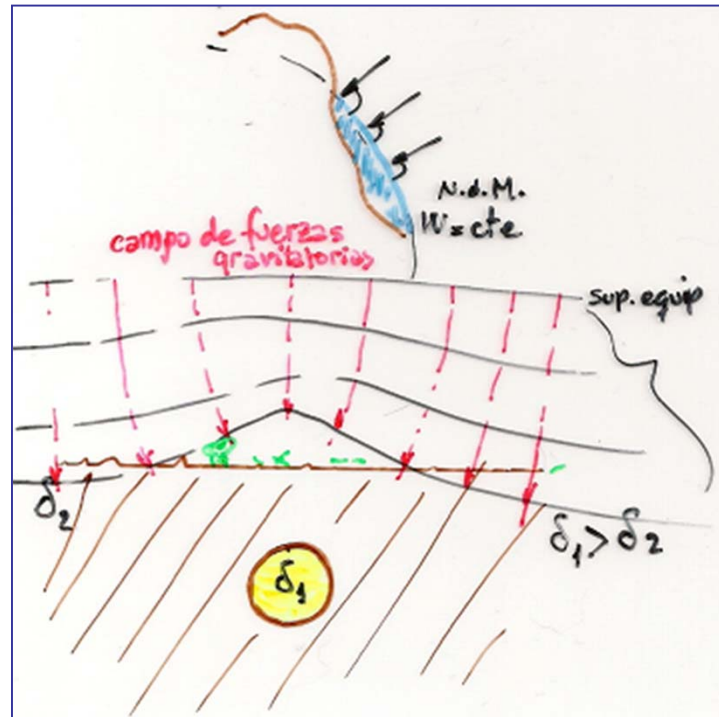
En polares

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{e}_\lambda$$

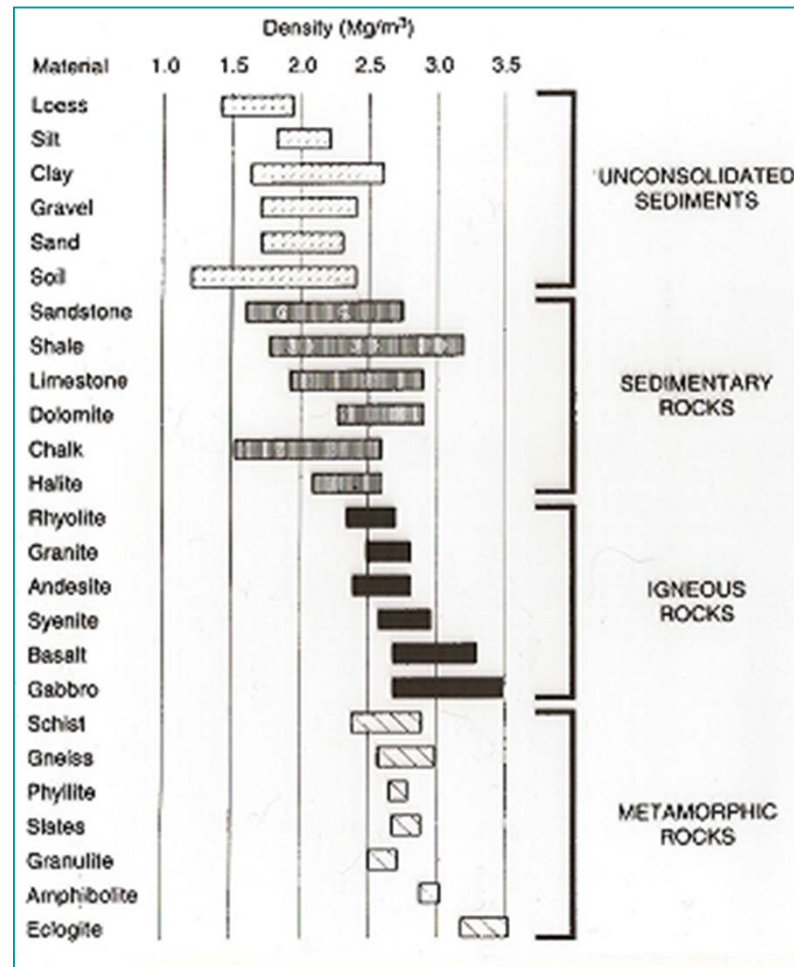


en el campo gravitacional terrestre se cumple
que la superficie de los océanos es ($W = cte$) equipotencial

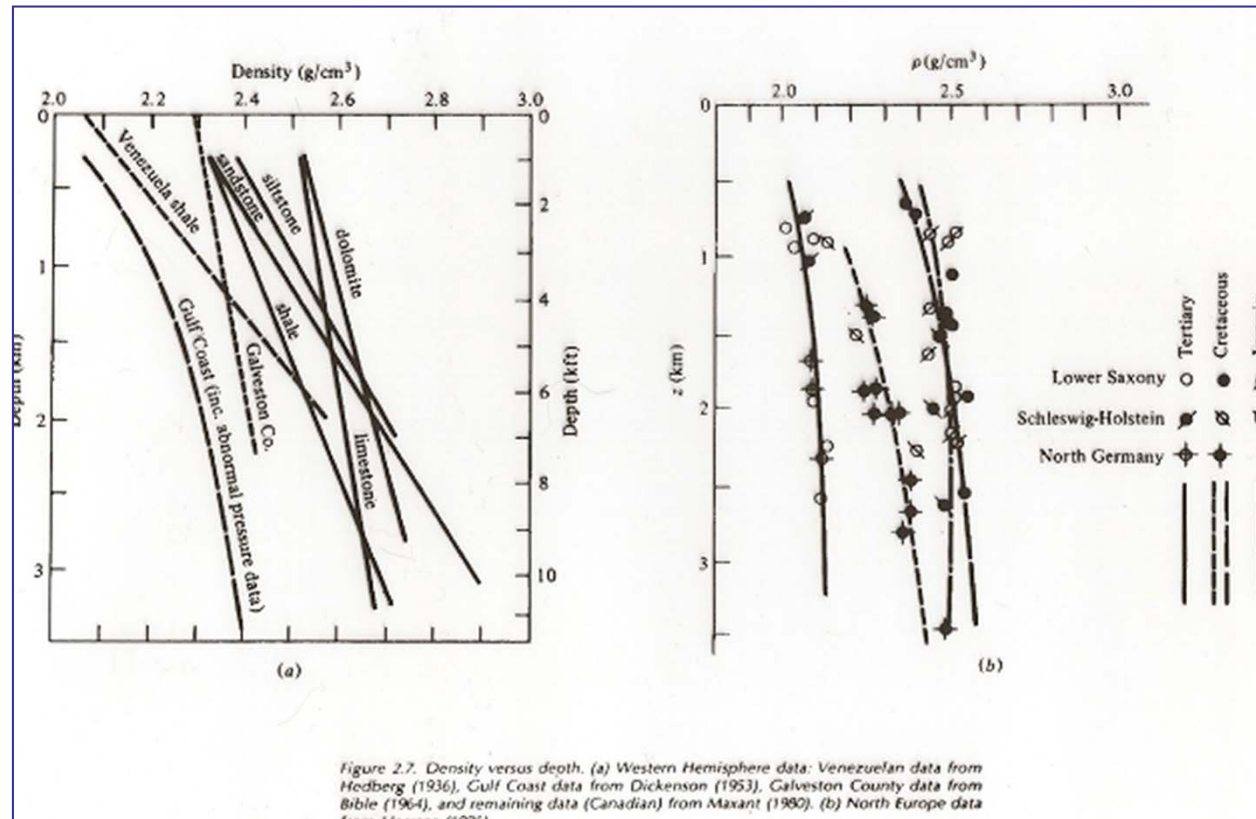
Esfera enterrada en un medio homogéneo menos denso



Variaciones en la densidad de distintos tipos de rocas



Densidad vs. Profundidad



Masa de una esfera

$$\text{Total mass } M \approx 255 \Delta g_{\max} (x_{1/2})^2 \text{ tonnes}$$

where Δg_{\max} is in mGal and $x_{1/2}$ in metres.

Example

For an air-filled cavity described in Box 2.19B, the total mass deficiency of the sphere is equal to the mass of the rock that

continued

continued

would have been in the cavity, times its density (2.5 Mg/m^3):

$$\text{Mass} = \text{density} \times \text{volume} = 2.5 \times (4/3)\pi 1.77^3 = 58 \text{ tonnes.}$$

Using the gravity data:

$$\text{Mass} \approx 255 \times 0.048 \times 2.2^2 = 59 \text{ tonnes.}$$

Anomalías de gravedad asociadas con formas geométricas

Models	Maximum gravity anomaly	Notes
<i>Sphere</i>	$\Delta g_{\max} = (4/3)\pi G \delta \rho r^3 / z^2$	$z = 1.305 x_{1/2} \text{ (m)}$
<i>Horizontal cylinder</i>	$\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho r^2 / z$	$z = x_{1/2}$
<i>Vertical cylinder</i>	$\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho (s_1 - d)$ $\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho r$ $\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho (L + s_1 - s_2)$	If $L \rightarrow \text{infinity}$ If $d = 0$ If L finite $z = x_{1/2} \sqrt{3}$
<i>Buried slab</i> (Bouguer plate)	$\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho L$	For $L = 1000 \text{ m}$ and $\delta \rho = 0.1 \text{ Mg/m}^3$, $\Delta g_{\max} = 42 \text{ g.u.}$
<i>Infinite slab</i>	$\Delta g_{\max} = 2\pi G \delta \rho (D - d)$	
<i>Horizontal</i> <i>rectangular prism</i>	$\Delta g_p = 2G \delta \rho \left[x \ln \left(\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3} \right) \right.$ $\left. + b \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + D(\phi_2 - \phi_4) - d(\phi_1 - \phi_3) \right]$	
<i>Vertical</i> <i>rectangular prism</i>	$\Delta g_{\max} = 2G \delta \rho [b \ln(d/L)]$	$L \gg b$
<i>Step</i>	$\Delta g_{\max} = 2G \delta \rho [x \ln(r_4/r_3)$ $+ \pi(D - d) - D\phi_4 + d\phi_3]$	
All distances are in metres unless stated otherwise; Δg_{\max} in mGal and $\delta \rho$ in Mg/m^3 , and the factor $2\pi G = 0.042$.		

- Profundidades estimadas para formas geométricas dadas

Form	Formula	Notes
<i>Sphere</i>	$z = 1.305x_{1/2}$ $d = z - r$	z is depth to centre of mass d is depth to top of sphere of radius r $r^3 = \Delta g_{\max} z^2 / (0.028 \delta \rho)$ from Box 2.18
<i>Horizontal cylinder</i>	$z = x_{1/2}$ $d = z - r$	z is depth to cylinder axis d is depth to top of cylinder of radius r $r^2 = \Delta g_{\max} z / (0.042 \delta \rho)$ from Box 2.18
<i>Vertical cylinder</i>	$z = 1.732x_{1/2}$	z is depth to top end of cylinder (overestimates z)
<i>Thin dipping sheet</i>	$z \approx 0.7x_{1/2}$ $z \approx x_{1/2}$	z is depth to top of sheet When $z \approx$ dip length of sheet When $z \gg$ dip length of sheet When length of sheet is very large or sheet dips at less than 60° , no solution is possible
<i>Thick prism</i>	$z = 0.67x_{1/2}$ $z = 0.33x_{1/2}$	z is depth to prism top = prism width, and depth to prism base is twice width When depth to prism base is 10 times prism width In both cases, estimates of z are unreliable

- Ejemplo de cálculo para una esfera

An air-filled cavity in rock of density 2.5 Mg/m^3 can be modelled by a sphere of radius r and depth to centre of mass, z (m). The resultant gravity anomaly is shown in Figure 2.29. Given $\Delta g_{\max} = 0.048 \text{ mGal}$, $x_{1/2} = 2.2 \text{ m}$, and $\delta \rho = 2.5 \text{ Mg/m}^3$:

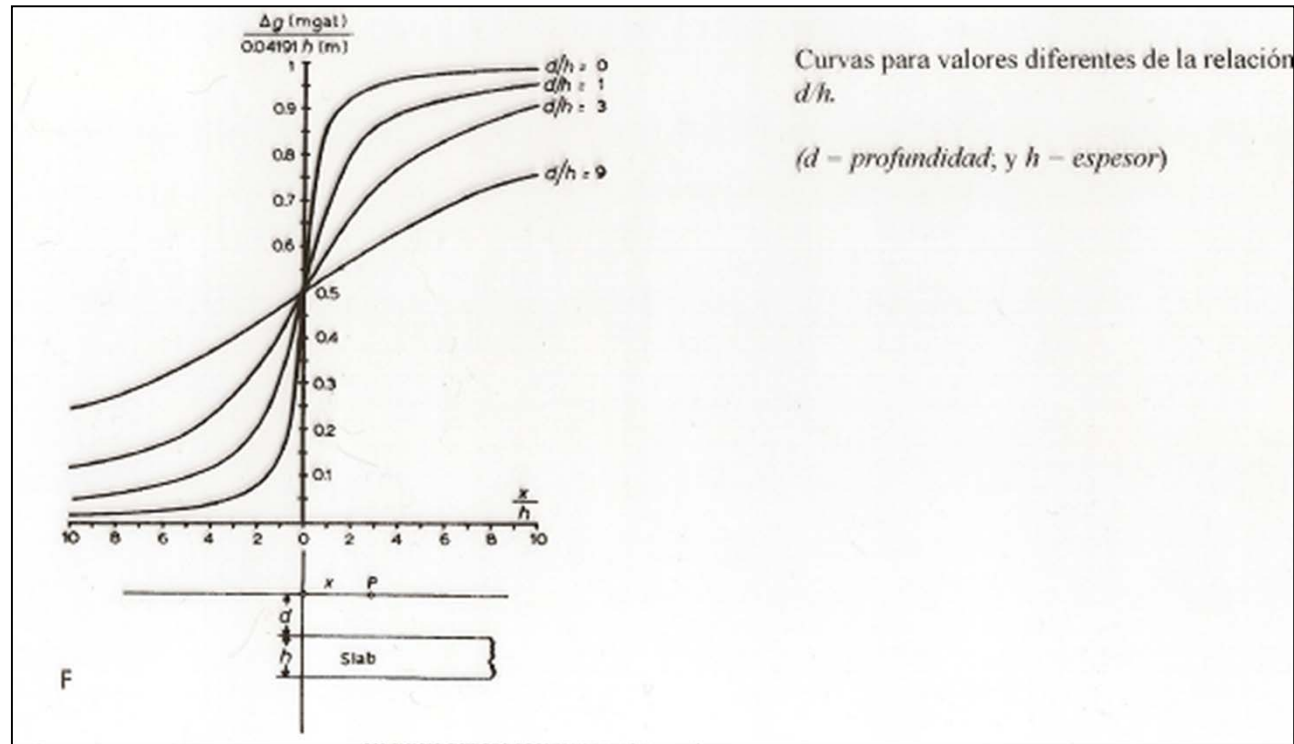
$$z = 1.305 \times 2.2 \text{ m} = 2.87 \text{ m}.$$

Radius of sphere = r :

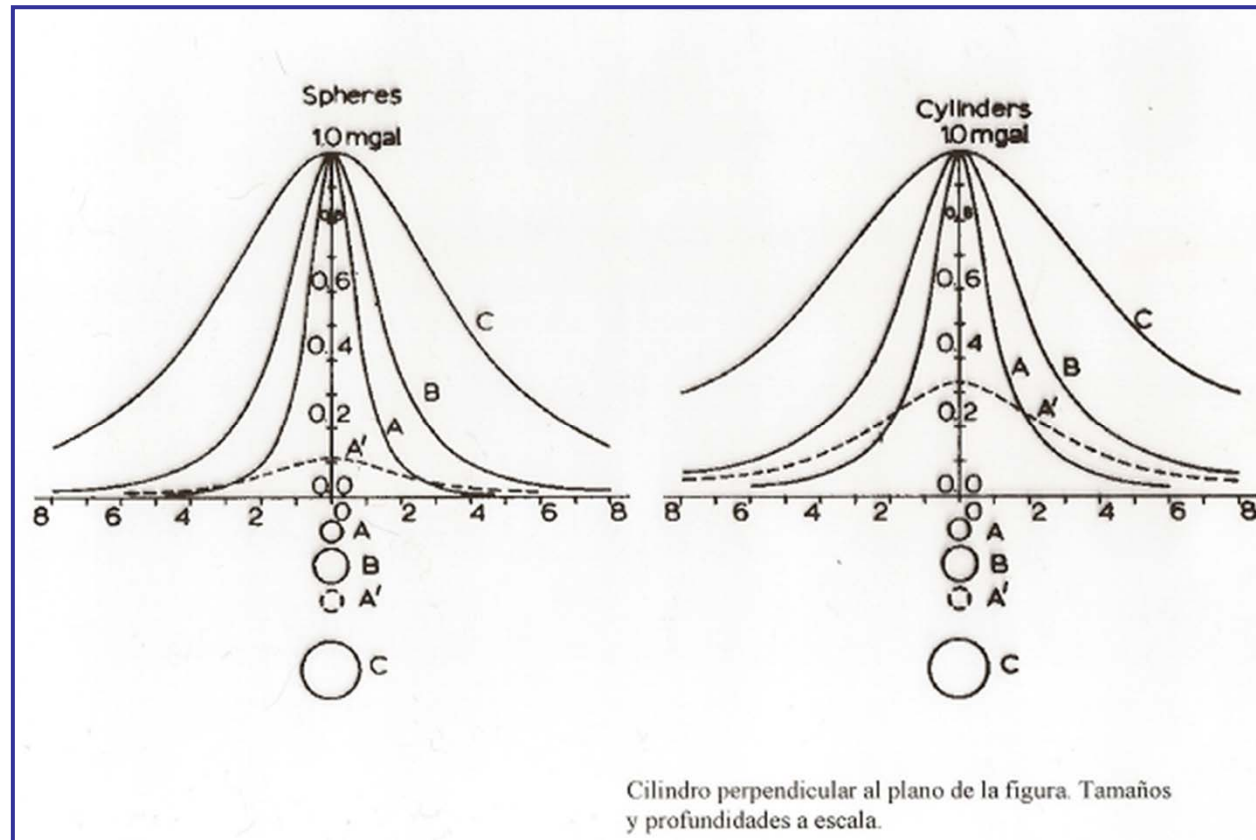
$$r^3 = 0.048 \times (2.87)^2 / (0.0286 \times 2.5) = 5.53 \text{ m}^3.$$

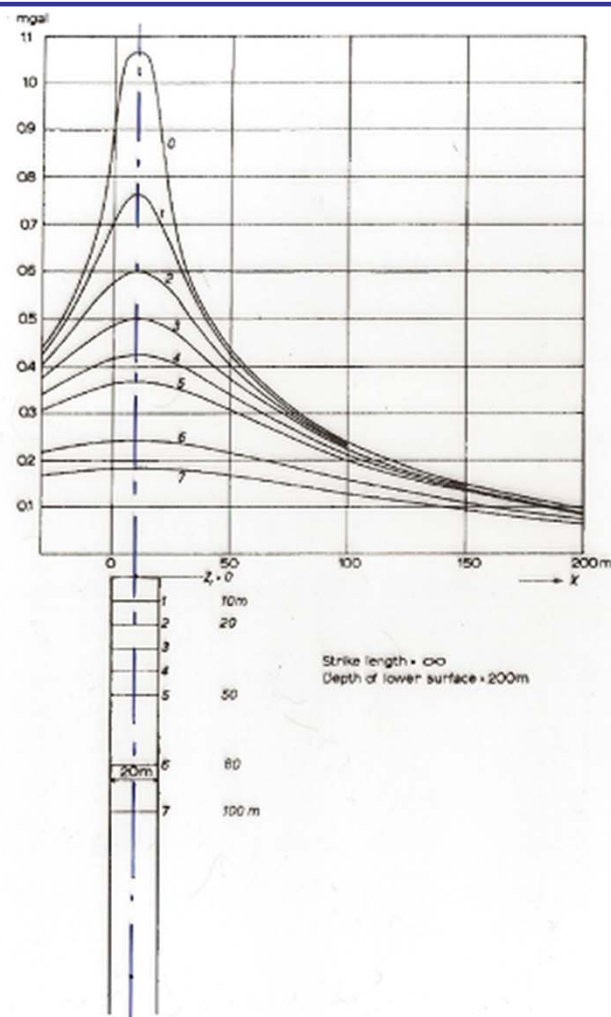
continued

Ejemplos de curvas gravimétricas sobre una losa semi-infinita



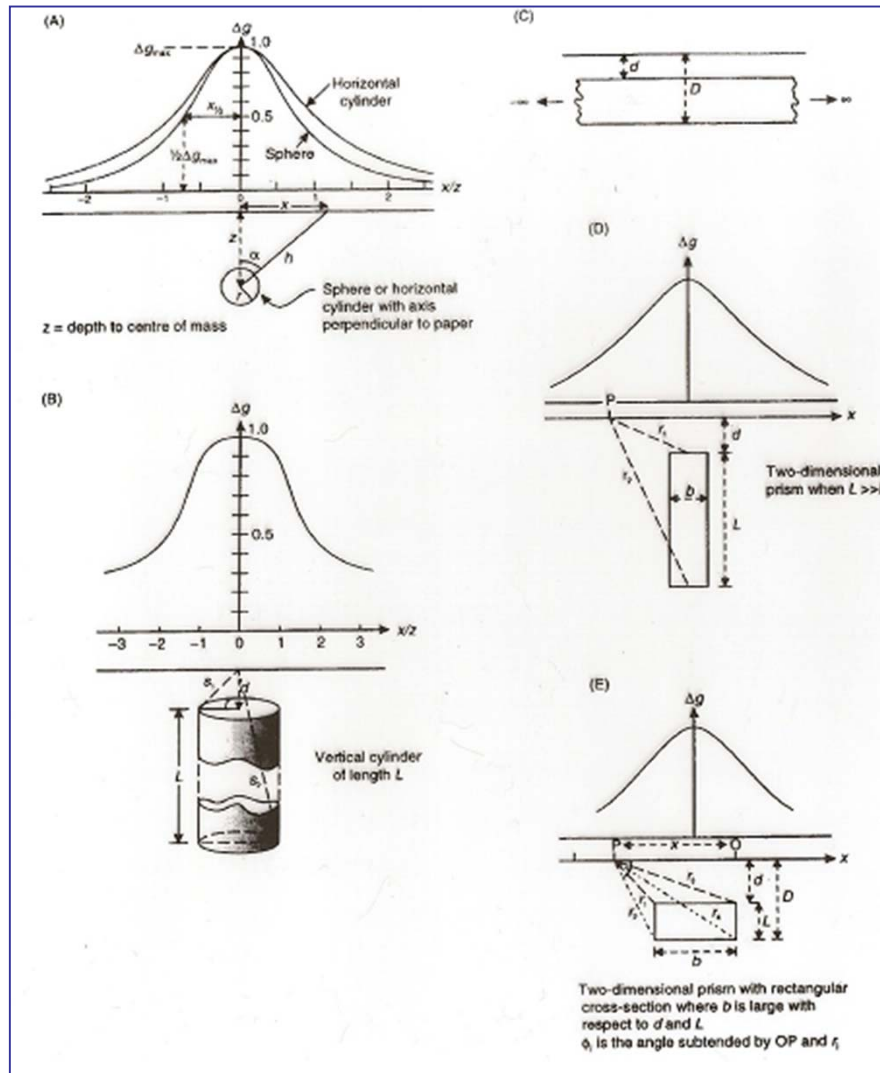
Anomalía gravimétrica de una esfera y un cilindro





Anomalías gravimétricas (*bidimensional*)
en cuerpos en forma de
capa o lámina (*diques*)

Representación de anomalías de gravedad debidas a cuerpos con distintas formas geométricas



- a) Esfera o cilindro horizontal con eje perpendicular al papel
- b) Cilindro vertical
- c) Losa horizontal semi-infinita
- d) prisma rectangular horizontal